

Economic Scenarios Simulator

Generatore di scenari sotto la misura di probabilità neutrale al rischio e reale

Carradori M. - Tesser M.

`matteo.carradori@fairmat.com`

`matteo.tesser@fairmat.com`

Fairmat SRL

30/01/2014

Fairmat ESG consente di calcolare congiuntamente scenari sotto la misura neutrale al rischio e reale per le seguenti *asset classes*:

- *Zero coupon bonds (ZCB)*;
- Tassi di inflazione;
- Credit spreads;
- Prezzi e dividendi per indici azionari.

Fairmat ESG : principali funzionalità

- Gli scenari possono essere esportati in file *CSV* o *Excel* ovvero il formato normalmente adottato da software di terze parti (e.g. *Moses*), oppure personalizzati su richiesta del Cliente;
- La frequenza e l'orizzonte temporale di simulazione possono essere definiti dall'utente;
- Possono essere integrati nella soluzione ulteriori modelli proprietari dell'utente scritti in linguaggi diversi (*Matlab*, *C++*, *C#*)
- I modelli, ad una qualunque data, possono essere calibrati in modo automatico se il software è collegato ad una fonte dati (e.g. *Bloomberg Professional Desk*, *Fairmat Data Provider*); è anche possibile un'imputazione di parametri già calibrati dall'utente.

Richiamo di un indice azionario tramite il *ticker Bloomberg Professional*

Figure: Impostazione della calibrazione sull'Euro STOXX 50.

The screenshot displays a software interface for setting up a calibration. At the top, there are tabs for 'Data Source', 'GBM', 'Preview', 'Bounds', 'Jumps', 'Parameters', and 'History'. The 'Data Source' tab is active. Below the tabs, the 'Binding type' is set to 'Bind object to specific data'. There are three input fields: 'Market' with 'EU', 'Foreign Market' with 'EU', and 'Ticker' with 'SX5E Index'. Each of these fields has a 'Publish' checkbox to its right, which is currently unchecked. Below these fields, the 'Calibration strategy' is set to 'Volatility surface calibration'. At the bottom of the form, there is a 'Calibration Options' button.

Completa trasparenza sui parametri del modello

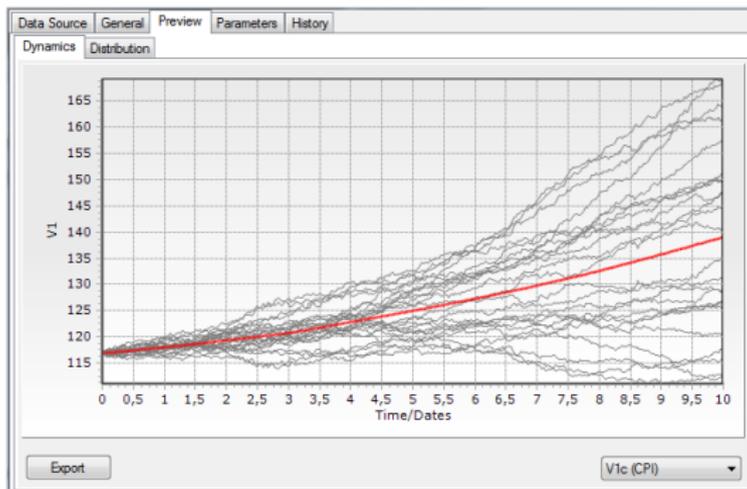
Figure: Parametri di calibrazione del modello di Jarrow-Yildirim.

Par. Name	Value	Range +/-	Sensitivity	Impact
Nominal Zero Rate	@ZR1	0	False	False
Real Zero Rate	@RealZR1	0	False	False
an	0,0139704230040181	0	False	False
ar	0,0583636601032895	0	False	False
Sigman	0,00953829147327309	0	False	False
Sigmar	0,0169883898401195	0	False	False
Signal	0,0108518588262807	0	False	False
r13	0,84311104631721	0	False	False
r12	0,820568684180872	0	False	False
r23	0,868702666274882	0	False	False
l0	116,86	0	False	False
Risk Premium	0	0	False	False
Seasonality Bumps	0	0	False	False

Parameters calibrated at date: 02/01/2014 using Fairmat Server Integration Data Provider

Anteprima della dinamica del sottostante simulato

Figure: Simulazione, sotto la misura neutrale al rischio, dell'indice CPI europeo.



Il modello di Jarrow-Yildirim (JY)

Il modello di Jarrow-Yildirim (JY) consente di descrivere, congiuntamente, la dinamica dei tassi a breve e dell'indice di inflazione, includendo la correlazione tra tasso nominale (nell'esempio seguente Hull-White ad un fattore), tasso reale ed inflazione.

La dinamica del modello, sotto la misura neutrale al rischio, è così descritta:

$$dn(t) = [\theta_n(t) - a_n n(t)]dt + \sigma_n dW_n(t)$$

$$dr(t) = [\theta_r(t) - \rho_{rI}\sigma_r\sigma_I - a_r r(t)]dt + \sigma_r dW_r(t)$$

$$dI(t) = I(t)[n(t) - r(t)]dt + \sigma_I I(t)dW_I(t)$$

dove $n(t)$ è il tasso nominale istantaneo, $r(t)$ è il tasso reale istantaneo e $I(t)$ è l'indice di inflazione (*Consumer Price Index* o *CPI*).

Il modello di Pelsser-Jarrow-Yildirim (PJY)

Si è adottata anche una versione modificata del modello di Jarrow-Yildirim, in cui è il modello quadratico gaussiano di Pelsser, invece del modello di Hull-White, a descrivere il tasso nominale, al fine di garantire la positività dei tassi.

$$\begin{cases} dy &= -aydt + \sigma dW \\ r &= [y + a(t)]^2 \end{cases}$$

Si vedano anche

<https://www.fairmat.com/plugins/documentation/jarrow-yildirim>

<https://www.fairmat.com/plugins/documentation/pelsser-squared-gaussian-mode>

Il modello di Jarrow-Lando-Turnbull (JLT) : introduzione

- Il modello di Jarrow-Lando-Turnbull (JLT) consente di prezzare obbligazioni soggette a rischio di *default* e derivati di credito come le *credit spread options*;
- Si tratta di un modello in forma ridotta dove il processo di migrazione tra classi di credito è modellato con una catena di *Markov* nella quale il “*Default*” è uno stato assorbente.

Le principali caratteristiche del modello *JLT* sono le seguenti:

- il modello restituisce il prezzo di uno *ZCB* soggetto a rischio di *default*:

$$v^i(t, T) = p(t, T)[\delta + (1 - \delta)Q_t(\tau > T)].$$

- Come si può vedere il modello consente di separare la componente *default-free* ($p(t, T)$) dell'obbligazione dal fattore di aggiustamento per il rischio di credito. Questa scomposizione consente all'utente di scegliere il modello di tasso a breve preferito (nel nostro caso *Pelsser*).

Il modello di Jarrow-Lando-Turnbull (JLT) : *Credit Spreads*

- Il fattore di aggiustamento per il rischio di credito $[\delta + (1 - \delta)Q_t(\tau > T)]$ dipende dal *recovery rate* (δ) e dalla matrice di transizione sotto la misura neutrale al rischio ($Q_t(\tau > T)$);
- δ è una costante esogena stimabile da serie storiche o da fonti di mercato;
- Le matrici di transizione sotto la misura neutrale al rischio sono ottenute a partire dalle matrici di migrazione del *rating* su base storica, dopo che il modello è stato opportunamente calibrato.

Il modello di Jarrow-Lando-Turnbull (JLT) : esempio

Abbiamo adottato questa matrice di migrazione del *rating* su base storica (1 anno) in quanto considera il periodo 1970-2010, ma qualsiasi altra matrice può essere utilizzata.

Figure: *Historical One-year Credit Transition Matrix, based on data 1970-2010. Source: Moody's.*

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	D
Aaa	0,9041	0,0892	0,0062	0,0001	0,0003	0	0	0,0001
Aa	0,0102	0,9012	0,0838	0,0038	0,0005	0,0002	0,0001	0,0002
A	0,0006	0,0282	0,9088	0,0552	0,0051	0,0011	0,0004	0,0006
Baa	0,0005	0,0019	0,0479	0,8941	0,0435	0,0082	0,002	0,0019
Ba	0,0001	0,0006	0,0041	0,0622	0,8343	0,0797	0,0068	0,0122
B	0,0001	0,0004	0,0014	0,0038	0,0532	0,8219	0,0719	0,0473
Caa	0	0,0002	0,0002	0,0016	0,0053	0,0941	0,731	0,1676
D	0	0	0	0	0	0	0	1

Indici azionari : il Geometric Brownian Motion (GBM)

Le principali caratteristiche del Geometric Brownian Motion (GBM) sono le seguenti:

- La dinamica del prezzo del titolo azionario (S_t) è descritta da un tasso di crescita coerente con la dinamica del tasso a breve:

$$dS = r_t S_t + \sigma S_t dW.$$

- Il modello è calibrato osservando le volatilità implicite;
- La dinamica futura del tasso di dividendo atteso (δ) è descritta da un modello *log-mean-reverting*

$$\frac{d\delta}{\delta} = \mu(\delta - \delta_l) + \sigma_\delta dW$$

- Laddove possibile vengono calibrate le correlazioni implicite (vedi modello di JY e PJY);
- Altre correlazioni sono calibrate su base storica (profondità 12 anni, frequenza mensile);
- La correlazione tra tassi a breve ed indici azionari-tassi di inflazione è derivata dall'Euribor a 3 mesi, una trasformazione del tasso a breve, dato che quest'ultimo non è direttamente osservabile sul mercato.

Test di Martingala (1=1)

Sia dato $r(z)$, processo di tasso a breve e $R(s, t)$ il tasso di rendimento di una generica *asset class*.

Secondo il “*one period returns test*”, per ogni s, t con $t > s$, deve valere:

$$E \left[(1 + R(s, t)) \frac{e^{-\int_t^s r(z) dz}}{e^{-\int_0^s r(z) dz}} \right] = 1$$

Test di Martingala - Assenza di arbitraggi

Il software verifica che gli scenari generati sotto la misura neutrale al rischio siano privi di arbitraggio in quanto:

- Il software utilizza modelli privi di arbitraggio;
- Il software controlla che i campioni di simulazione generati rispettino le proprietà teoriche;
- Il software confronta i rendimenti attesi di ciascuna *asset class* con i rendimenti sul mercato monetario;
- Il software seleziona (ottimizza) gli scenari in modo che tutti i test di martingala siano superati.

Altri test di *market consistency*:

Il software verifica che gli scenari generati superino i seguenti test:

- Test di replicazione della *yield curve*;
- Test di replicazione della volatilità;
- Test di replicazione della correlazione.

- T. R. Bielecki, M. Rutkowski (2002), "*Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*". Springer Verlag, Berlin. Chapter 11.
- R. A. Jarrow, D. Lando, S. M. Turnbull (1997), "*A Markov model for the term structure of credit risk spreads*". The Review of Financial Studies, 10, n. 2, 481-523.
- P. Millosovich (2003), "*An extension of the Jarrow-Lando-Turnbull model to random recovery rate*". [http://www2.units.it/matappl/PDF file/153.pdf](http://www2.units.it/matappl/PDF%20file/153.pdf)